Métodos topológicos en el análisis no lineal
Clase 7 - 28/9 (versión preliminar)

Cuando no estás, la flor no perfuma

La semana pasada, como es sabido, la respetable concurrencia del curso de métodos topológicos gozó de un merecido descanso. Por eso, no está de más recordar algunas de nuestras andanzas con el índice y otras vueltas de la vida, a modo de inspiración (deshojada y mustia flor/de amor) para definir el grado de Brouwer.

Vimos que dada una curva cerrada $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ se puede definir el índice $I(\gamma)$ como el número de vueltas alrededor del origen: en principio lo vimos para curvas suaves, pero luego, gracias a Rouché, logramos extenderlo para γ continua y, además, probar la invariancia por homotopía. Este va a ser, a grandes rasgos, el *modus operandi* para definir el grado para una función $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto acotado.

Aquí surge una primera observación inquietante, ya que no es eso lo que definimos para $n = 2$. Sin embargo, la invariancia por homotopía va a mostrar que en realidad el grado de f depende únicamente de su valor sobre $\partial\Omega$: de esta forma, para $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ podemos proponer, tal como anticipamos la clase pasada, la siguiente definición del grado de una f que no se anula en el borde:

$$\deg(f, \Omega, 0) := I(f \circ \gamma),$$

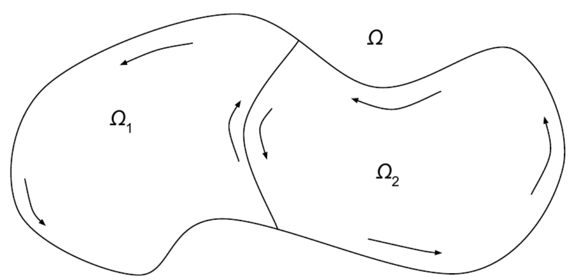
donde γ es una parametrización de $\partial\Omega$. Para que esto tenga sentido (literalmente) hay que darle una orientación a $\partial\Omega$ pero, aún así, podría tratarse de un conjunto bastante feo como para dejarse parametrizar por una curva cerrada $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$. Por ese motivo, por simplicidad supondremos por ahora que Ω es una región -valga la redundancia- simple. En tal caso, la definición anterior es buena, asumiendo que γ tiene la orientación positiva pues, como dijimos, el índice no depende de la parametrización. El grado así definido es invariante por homotopías, es decir: si $h : \overline{\Omega} \times [0, 1] \to \mathbb{C}$ verifica $h(z, 0) = f(z)$, $h(z, 1) = g(z)$ y $h(z, s) \neq 0$ para $z \in \partial\Omega$, entonces $\deg(f, \Omega, 0) = \deg(g, \Omega, 0)$. Esto es consecuencia inmediata del hecho de que la función $\hat{h}(t, s) = h(\gamma(t), s)$ es una homotopía entre las curvas $f \circ \gamma$ y $g \circ \gamma$.

La siguiente observación es que si $\deg(f, \Omega, 0) \neq 0$ entonces f se anula en Ω. En la clase pasada vimos esto para $\Omega = B$, aunque Ω puede ser lo suficientemente intrincado como para invitar a pensar en una homotopía amigable. Pero antes de invocar teoremas complicados (¿Jordan, tal vez?), podemos apelar a una idea salvadora: para calcular el índice, alcanza con aproximar por poligonales; de esta forma, se puede probar el resultado -por ejemplo- por inducción en la cantidad de vértices.

Una última observación elemental va a servirnos como punto de partida para la definición de grado en $\mathbb{R}^n$ a partir de un enfoque analítico. Empecemos por observar la siguiente propiedad de aditividad, por ahora en su versión "simple": si $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$ son abiertos disjuntos tales que $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$ y f no se anula en $\partial\Omega_j$, entonces

$$\deg(f, \Omega, 0) = \deg(f, \Omega_1, 0) + \deg(f, \Omega_2, 0),$$

tal como muestra la siguiente figura:



Vamos entonces a lo nuestro: sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ una región acotada simple y $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ de clase C^1 que no se anula en el borde. ¿Habrá alguna forma de relacionar el grado con los ceros de f? Ya sabemos que, en general, no; sin embargo, hay una forma sencilla de 'calcular' el grado cuando 0 es un *valor regular* de la función, es decir, cuando $Df(x)$ es suryectiva para todo $x \in f^{-1}(0)$. Claro que, por esas cosas de la dimensión, en este caso quien dice 'suryectiva' dice 'biyectiva', lo que permite deducir que $f^{-1}(0)$ es un conjunto finito.

Aquí el lector tiene todo el derecho de preguntar: ¿Eeeeeeh, cómo es eso? Pero la explicación es inmediata: por el teorema de la función inversa, cada preimagen del 0 es aislada; en otras palabras, el conjunto $f^{-1}(0)$ es discreto y no se puede acumular en $\partial\Omega$ porque allí f no se anula.

Llega ahora el momento crítico, si vale el contrasentido: ¿qué tal si dividimos Ω en muchos pedacitos (simples, por favor), de manera que cada uno de ellos contenga una preimagen de 0? Por aditividad, el grado va a ser la suma de los grados en dichas regiones. Pero para calcular el grado en cada una de esas regiones podemos quedarnos con una bolita de radio r centrada en la preimagen correspondiente, como muestra la siguiente (algo lacónica) Figura 1. El detalle crucial es que podemos tomar r tan chico como haga falta, de modo que en cada $x \in f^{-1}(0)$ la función $f(y)$ se comporta como su aproximación lineal $Df(x)(y - x)$, cuyo grado es fácil de calcular. De eso nos ocuparemos en la próxima clase.

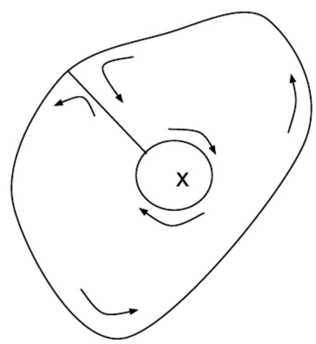


Figura 1: Elimine todo lo que su dominio no necesita